Introdução à Análise de Algoritmos

Quanto tempo leva a execução de determinado algoritmo?
Quando dois algoritmos fazem a mesma coisa, qual deles leva menos tempo?
É possível fazer a análise baseada no fluxo do algoritmo?

A análise do algoritmo preocupa-se com as questões acima.
É sempre conveniente conhecer ou ter uma medida da eficiência de um algoritmo que será usado para resolver um problema.

O comportamento de alguns algoritmos

Raízes de equação do 2. grau

```
def raiz(a, b, c):
   ...
     x1 = (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
     x1 = (-b+sqrt(b*b-4*a*c))/(2*a)
     return x1, x2
```

Se desconsiderarmos os casos particulares (delta negativo, a = 0, etc.), esse algoritmo realiza sempre o mesmo número de operações.
Podemos afirmar então que o tempo que esse algoritmo leva é uma constante.
`t = k`

Máximo entre os elementos de uma lista

```
def max(a, N):
    m = a[0]
    for i in range(1, N):
        if m < a[i]: m = a[i]
    return m
```

Esse algoritmo sempre repete um conjunto de operações N-1 vezes.
Podemos afirmar então que seu tempo é proporcional a N mais uma constante.
$t = k1 + k2 * (N - 1) = (k1 – k2) + k2.N$

Podemos dizer simplesmente que o tempo é proporcional a N. Quando N é grande a constante é desprezível.

Contar a quantidade de nulos numa lista de N elementos

```
def nulos(a, N):
   c = 0
   for i in range(N):
       if a[i]) == 0: c += 1
   return c
```

Idem ao anterior. Repetindo N vezes. Portanto o seu tempo é da forma:
t = k1 + k2 * N

Portanto, proporcional a N.

Verifica se duas listas de N elementos são iguais

```
# devolve True se iguais e False se diferentes
def compara(a, b, N):
    if len(a) != len(b): return False
    tam = len(a)
    for i in range(tam):
        if a[i] != b[i]: return False
    return True
```

Neste caso o resultado depende dos dados, pois termina no primeiro elemento diferente encontrado. No pior caso (todos iguais ou o último diferente) também é proporcional a N. Mesmo considerando um caso médio de N/2, será proporcional a N.
`t = k1 + k2 * N`

Contar quantos bits significativos tem um inteiro

```
def num_bits(N):
   c = 0
   while N != 0:
       c += 1
       N /= 2  # ou N = N << 1
   return c
```

O resultado `c` é o menor inteiro maior que `lg N (base 2).`
$2^{c-1} <= N <= 2^c$

O tempo é então proporcional a `lg N.`
`t = k1 + k2 * lg(x)`

Notação:

`log x` – (base 10)
`lg x` – (base 2)
`ln x` – (base e) – logaritmo natural

Observe que podemos dizer que os dois últimos exemplos acima são proporcionais ao logaritmo, sem mencionar a base, pois:

`log N = lg N/lg 10` **ou** `log N = k.lg N`

Imprimir tabela de i / j (1 ≤ i, j ≤ N)

```
def imp_tabela (N, M):
    for i in range(1, N + 1):
         for j in range(1, N + 1):
              print(i / j, end = "")
         print()
```

O tempo é proporcional a `N*N`.
$t = k1 + k2 * N^2$.

Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]

Faça o algoritmo. São dois comandos **`for`** encaixados:

O tempo é proporcional a `N*M`. Um limitante superior é `N*N`, supondo `N` o maior deles.
$t = k1 + k2 * N^2$.

Idem imprimindo a tabela i * j * k (1 ≤ i ≤ N; 1 ≤ j ≤ M; 1 ≤ k ≤ P)

Serão três comandos **`for`** encaixados. Neste caso será proporcional a `N*M*P`.
Podemos considerar `N*N*N,` supondo N o maior deles.
$t = k1 + k2 * N^3$.

Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]

Faça o algoritmo. Serão três comandos **`for`** encaixados:

O tempo é proporcional a `N*M*P`. Um limitante superior é `N*N*N`, supondo `N` o maior deles.
$t = k1 + k2 * N^3$.

Proporcionalidade dos algoritmos anteriores:

Os algoritmos acima são proporcionais a:

`1` – sempre executam as mesmas instruções uma só vez. Dizemos que o tempo de execução neste caso é uma constante.

`N` – dependem apenas de um parâmetro que é o número de vezes que um determinado laço é executado.

`log N` – Não importa a base, pois log N, lg N ou ln N são proporcionais. Assim não vamos indicar a base. Vamos dizer apenas que o algoritmo leva um tempo logarítmico para

ser executado. Note também que um algoritmo com essa característica é muito interessante. Quando N é 1.000 o tempo é proporcional a 3. Quando N fica 1.000 vezes maior (1.000.000) o tempo apenas dobra (proporcional a 6).

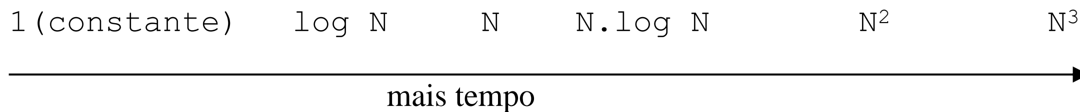
N^2 – em geral esses algoritmos têm um for encaixado em outro for. Quando N é 1.000, o tempo é proporcional a 1.000.000. Quando N dobra o tempo multiplica por 4.

N^3 - em geral possuem um for dentro dum um for dentro de um for. Quando N dobra, o tempo se multiplica por 8.

Outros algoritmos podem ainda serem proporcionais a `N.log N`, ou exponenciais, proporcionais a 2^N ou 10^N.

Um pouco de intuição

É intuitivo que para valores de N grandes, quanto maior a ordem do expoente, mais tempo leva o algoritmo.



Sobre os algoritmos

O tempo depende dos dados em cada execução do algoritmo. Pode ser que para um conjunto de dados o algoritmo A1 seja mais rápido que o A2. Para outro conjunto o tempo pode se inverter.

Um algoritmo pode levar um tempo pequeno quando N é pequeno, mas demorar muito quando N é grande. Por exemplo, um algoritmo que tem um tempo proporcional a N^3.

Às vezes não interessa muito se o algoritmo leva um tempo maior ou menor, pois a execução numa máquina é tão rápida que não faz diferença usarmos o algoritmo A1 ou A2. Isso ocorre principalmente se o algoritmo não requer muito tempo de CPU.

O comportamento de dois algoritmos pode ser diferente em CPUs diferentes.

O que realmente dá para se afirmar de maneira absoluta a respeito do tempo que um algoritmo vai demorar?

A notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou notação Grande-O

Para expressar essa idéia de tempo proporcional a alguma função, foi proposta a notação O(f(N)) – Ordem de f(N) ou ainda notação Grande-O (big-O notation).

Definição:

Dizemos que g(N) é O(f(N)) se existirem constantes c_0 e N_0 tais que $g(N) < c_0 f(N)$ para todo $N>N_0$. Ou seja, a partir de um determinado N, a função f(N) multiplicada por uma constante é sempre maior que g(N). Veja o gráfico abaixo.

Outra forma é definir O(f(N)) como um conjunto:

$O(f(N)) = \{ g(N)$ se existem constantes c_0 e N_0 tais que $g(N) < c_0 f(N)$ para todo $N>N_0 \}$

Podemos dizer livremente que g(N) = O(f(N)), mas o mais correto é dizer:
g(N) é O(f(N)) ou $g(N) \in O(f(N))$.

Com essa notação, podemos desprezar os termos que contribuem em menor grau para o tempo total, obtendo assim um limitante superior mais simplificado para o tempo total.

Veja que c_0 e N_0 escondem coisas importantes sobre o funcionamento do algoritmo:

- Nada sabemos para $N < N_0$.
- c_0 pode esconder uma enorme ineficiência do algoritmo – por exemplo, é melhor N^2 nano-segundos que log N séculos. Ou seja, a unidade N é importante.

Só interessa o termo de maior ordem. Podemos desprezar os termos de menor grau.

O(1) é o mesmo que O(2) que é o mesmo que O(K) – constante

$O(1 + N + N^2)$ é $O(N^2)$

Observe que $1 + N + N^2 < N^2 + N^2 + N^2 = 3.N^2$ para $N > N_0$

$O(N.\log N + N^2)$ é $O(N^2)$

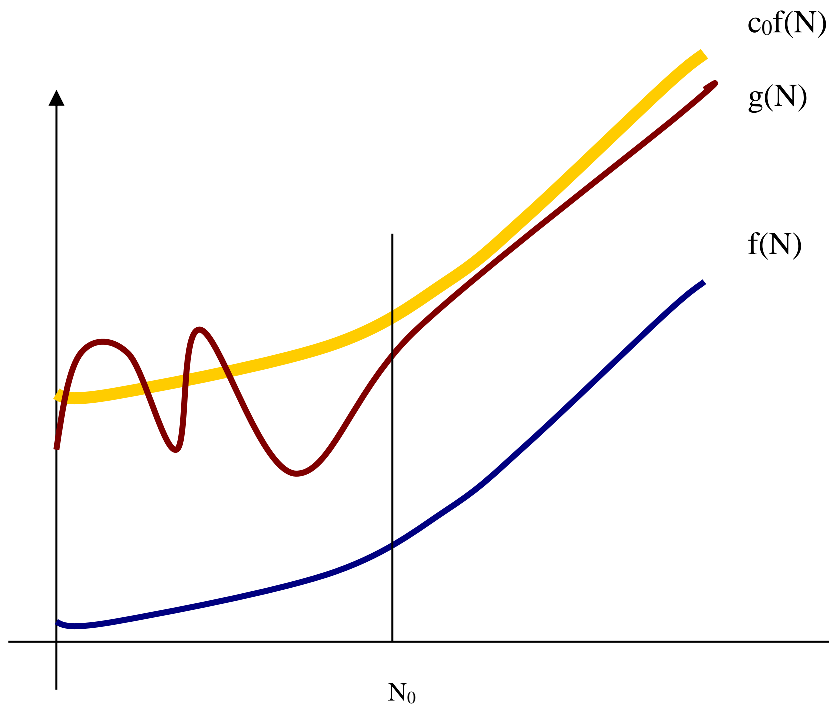
Observe que $N.\log N + N^2 < N^2 + N^2 = 2.N^2$ para $N > N_0$

Propriedades:

a) $O(f(N)) + O(g(N))$ é $O(\max\{f(N), g(N)\})$

b) $O(f(N)).O(g(N))$ é $O(f(N).g(N))$

c) $O(k.f(N))$ é $O(f(N))$ desde que $k \neq 0$



Exemplo de análise de algoritmos

Vejamos um algoritmo simples e algumas características de sua análise.

Algoritmo de busca sequencial:

```
# procura x em a[0], a[1], ... a[N-1]
# devolve o índice do primeiro elemento encontrado
def busca(a, x, N):
   for i in range(N):
      if a[i] == x return i
   return -1
```

A função index do Python faz algo parecido com a função acima. Mas, a única forma de procurar um elemento numa lista é varrer a lista comparando um a um.

Existem muitas variações deste algoritmo, mas todas elas têm que percorrer a lista.

Quantas comparações são necessárias até encontrar o elemento procurado ou concluir que ele não está na tabela?

Melhor caso: 1 - uma só comparação quando `x == a[0]`.
Pior caso: N – quando não encontra ou `x == a[N-1]`.
Caso médio: (1+N) / 2 – média entre o pior e o melhor ?

Para considerarmos a média entre o melhor e o pior caso, estamos assumindo uma hipótese importante. A probabilidade de ser qualquer valor entre 1 e N é a mesma. Isso normalmente não é verdade.

De uma maneira geral, a determinação do pior caso dá uma boa informação de como o algoritmo se comporta e oferece um limitante superior para o tempo que o algoritmo demandará.

O caso médio é o mais interessante de ser determinado, mas nem sempre é possível, pois muitas vezes depende de hipóteses adicionais sobre os dados.

Supondo então o pior caso, o algoritmo acima é O(N) (linear). Mesmo considerando a média de N/2 repetições, esse algoritmo seria O(N).

Outro exemplo - 1

Determinar qual o último elemento igual a x de uma lista.
A melhor solução é a busca sequencial do fim para o começo do vetor.

```
# procura x a partir do fim da lista
def busca(a, x):
    N = len(a)
    for i in range(N - 1, -1, -1):
        if a[i] == x: return i
    return -1
```

É uma solução O(N). O pior caso, é repetição N vezes e mesmo num caso médio, seria sempre proporcional a N.

Se a busca for realizada do início para o fim, o algoritmo é menos eficiente na média, mas continua sendo O(N).

```
# procura x a partir do início da lista
def busca1(a, x):
    N = len(a)
    k = -1
    for i in range(N):
        if a[i] == x: k = i
    return k
```

Outro exemplo - 2

Função que recebe um inteiro n > 0 e devolve lista com os dígitos que se repetem em n.

Solução 1 – compara cada dígito de n com todos os demais:

```
def repetidos(n):
```

```
    st = str(n) # transforma n numa string
    rept = []
    # para cada dígito de n varre todos os dígitos de n
    for i in range(len(st)):
        for j in range(len(st)):
            if i != j and st[i] == st[j] and int(st[i]) not in rept:
                rept.append(int(st[i]))
    return rept
```

Se n tem N dígitos, o comando if acima é repetido N x N vezes. Portanto o algoritmo é $O(N^2)$.

Há outras soluções para esse mesmo problema. Abaixo, uma delas onde a repetição é feita somente N vezes, sendo portanto o algoritmo O(N). Nesta solução usamos uma lista com 10 contadores. Um para cada dígito de n.

```
def repetidos1(n):
    rept = []
    digitos = [0 for k in range(10)] # contadores de cada dígito
    # isola cada dígito de n e conta
    while n > 0:
        dig = n % 10
        digitos[dig] += 1 # conta o dígito
        n = n // 10
    # verifica quais digitos aparecem mais de uma vez
    for k in range(10):
        if digitos[k] > 1: rept.append(k)
    return rept
```

Podemos dizer também que o algoritmo acima é O(log n) (n minúsculo). Observe que log n é a quantidade de dígitos de n que chamamos acima de N (N maiúsculo).

A notação O(f(N)) é a complexidade dos algoritmos

Como já vimos, a notação O(f(N)) ignora pontos importantes sobre o algoritmos:

- Como ele funciona para N menores
- Se vamos rodar num computador lento ou rápido

Mas do ponto de vista de complexidade, o que se pode afirmar e, portanto, o que interessa sobre o algoritmo é o seu comportamento assintótico, isto é, qual a curva que melhor descreve o seu comportamento.

Veremos que existem algoritmos com vários comportamentos:

Constantes – O(1)
Lineares – O(N)
Quadráticos – $O(N^2)$
Polinomiais – $O(N^k)$
Exponenciais - $O(k^N)$
Logarítmicos – O(lg N) ou O(N.lg N)

Sempre que desenvolvermos um algoritmo a partir de agora neste curso, tentaremos responder sempre a sua complexidade ou o seu comportamento frente a notação O.

Alguns exemplos

Vejamos os algoritmos acima:

Raízes de equação do 2. grau

O(1)

Máximo de uma sequência de n elementos

O(N)

Conta a quantidade de nulos num vetor de N elementos

O(N)

Verifica se dois vetores de N elementos são iguais

O(N)

Conta os algarismos significativos de um inteiro

O(log N)

Conta quantos bits significativos tem um inteiro

O(log N)

Imprimir tabela de i / j ($1 \leq i, j \leq N$)

O(N.M) ou **O(N^2)** se **N > M**

Multiplicar matriz A[NxM] por vetor X[M]

O(N.M) ou **O(N^2)** se **N > M**

Idem imprimindo a tabela i * j * k ($1 \leq i \leq N$; $1 \leq j \leq M$; $1 \leq k \leq P$)

O(N.M.P) ou **O(N^3)** se **N > M,P**

Multiplicar matriz A[NxM] por matriz X[MxP]

O(N.M.P) ou **O(N^3)** se **N > M,P**

Imprimir todos os números com até N dígitos

O(10^N)